中京大学経済学論叢
18号
2007年３月

環境水準と出生率
－利他的遺産動機モデルによる分析－*

釜田公良
佐藤隆
平澤誠

１．はじめに

人口の変化が環境に影響を及ぼすことは自明と考えられる一方で、将来の環境水準は個人の出産選択に影響を与える可能性がある。例えば、利他主義に基づいて親が子の数を選択する場合、将来の環境水準の悪化は子の効用水準の低下を招くと予想されるので、少子化を促す可能性がある。しかし、実際に子の数が減り、人口の減少が起きるとすれば、それは将来の環境水準にプラスの効果をもつかもしれない。このように、環境と人口には明らかに相互作用が存在する。

本研究では、環境と人口との相互作用を分析するために、汚染水準と出生率の決定を同時に考慮したモデルの構築を行なう。出生率の内生化にあたっては、Becker and Barro（1988）と同様に、利他主義（利他的遺産動機）に基づいて親が子の数を選ぶとする。利他的遺産動機の下で環境問題を分析した研究には、Jouvet, Michel and Vidal（2000）、Jouvet, Michel and Pestieau（2000）がある（後者においては、利他主義者と非利他主義者が共存するケースを考えている）。これらにおいては、利他的な親が、遺産に加えて、より良い環境を将来に残すために、自発的に環境保全のための支出を行うことが想定されている。そして、競争均衡においては、外部性のために環境保全支出が過少となり、環境水準が社会的に最適な水準よりも低くなることが示されている。また、これらのモデルでは、生産を環境悪化要因とする一方、個人が環境への生産の影響を認識していないため、生産のための資本となる遺産にも外部性が発生する。その結果、資本は過剰蓄積される。そして、競争均衡においてファースト・ベストを達成するためには、環境保全支出に対

＊　本論文の基礎となる研究に対して、中京大学特定研究助成（平成16年度）を受けたことに感謝する。

する補助金と遺産（あるいは貯蓄）に対する課税が必要であることが明らかにされている。しかし、これらの研究においては、出生率は外生的に扱われており、環境と人口との相互作用は分析の対象とされていない。

利他的遺産動機の下で出産選択とその環境に対する外部性を取り扱った研究は、われわれの知る限り、Harford（1997, 1998）のみである。Harford（1998）は、２種類の財を考え、そのうちの１つの財の消費が環境の悪化を引き起こすとしている。子を増やせば汚染源となる財の消費の総量も増えるため将来の環境に負の影響を及ぼすが、親はこれを十分に認識せずに出産選択を行う。その結果、子を持つことには環境に対する外部性が発生する。Harford（1998）は、このような場合においてファースト・ベストを達成するためには、汚染源となる財に対するピグー課税だけでは不十分であり、子を持つことに税を課す必要があることを示している。

本論文においては、Jouvet, Michel and Vidal（2000）、Jouvet, Michel and Pestieau（2000）と同様に、生産を環境悪化要因と考え、遺産の環境外部性を明示的に考慮する。また、子の増加は将来の生産の増加につながるため、子を持つことにも環境外部性が存在するとする。このような２つの種類の外部性を導入することにより得られる重要な（かつ逆説的な）帰結は、子を持つことが環境に対して外部不経済を与えるにもかかわらず、競争均衡における子の数は社会的最適解と比べて過少になる可能性があるということである。これは、親は子を持つことの限界費用と限界便益が一致するように子の数を選ぶが、遺産は子を持つことのコストの一つであり、遺産を増やせば子を持つことの限界費用が上昇することに起因する。すなわち、遺産が環境外部性によって過剰に選ばれている状況では、それが子を持つことの私的限界費用を社会的限界費用に比べて引き上げる方向に働く。この効果が子を持つことの環境外部性による効果を凌ぐならば、子の数は過少に選ばれる。

一方、競争均衡における汚染水準は、子の数および遺産が過少であるか過剰であるかに関わらず、常に社会的最適解よりも高くなる。これは、遺産および子を持つことが本来有している環境外部性のためであると考えられる。

また、本論文では、環境と出生率の相互作用をより明確にするために、比較静学分析を試みる。すなわち、環境に直接的に作用するパラメータである排出係数（生産の１単位の増加がどれだけ汚染を増加させるか）、および、出産選択に直接的に作用するパラメータである子の養育費が変化した場合の出生率、遺産および汚染水準の変化を競争均衡の下で検討する。結果としては、排出係数の上昇は出生率を低下させ、遺産を増加さ

せるが、それ以外のケースについては、一般的に符号は定まらない。そこで、さらに関数型を特定化して数値分析を行う。その結果によれば、ここで考慮したパラメータの範囲の中では、排出係数の上昇は汚染水準を上昇させる。また、養育費の増加は、出生率を低め、遺産を増加させる一方で、汚染水準を低下させる。

本論文の構成は次のとおりである。第2節においては、モデルを示し、それに基づいて競争均衡を導出する。第3節においては、第2節において提示したモデルに基づき、比較静学分析を試みる。第4節においては、政府を導入して社会的最適解を導出する。そして、出生率や汚染水準について、競争均衡との比較を行う。第5節においては、得られた結果を要約する。

2．モデル

親の世代と子の世代の2世代が存在する経済を考える。それぞれの世代は1期間だけ生き、各世代は重複しないものとする。親の世代が生存する期を第0期、子の世代が生存する期を第1期とする。親の世代の人口は N であり、それぞれが n 人の子をもつとする。したがって、子の世代の人口は Nn となる。親の世代および子の世代のメンバーは、それぞれ同質的であるとする。

Becker and Barro（1988）と同様に、親は利他主義に基づいて、子の数を選択するものとする。子一人を養育するには一定のコスト β（＞0）がかかるとする。親は前の世代から受けとった遺産 b_0 の元利合計から養育費を引いたものを自分の消費 c_0 と子への遺産に配分する。一方、子は親からの遺産 b_1 をすべて消費する。

親の効用は消費、環境の汚染度および子の効用水準に依存するものとし、親の効用関数を次のように定式化する。

$$U_0(c_0, \pi_0, n, U_1) = u_0[(1+r)b_0 - n(b_1+\beta)] - V_0(\pi_0) + n\delta(n)U_1 \tag{1}$$

ここで、r は利子率、$\delta(n)$ は親が子の効用におくウエイト、U_1 は子の効用水準、π_0 は第0期の汚染度である。また、$u_0' > 0$、$u_0'' < 0$、$V_0' > 0$、$V_0'' > 0$、$0 < \delta(n) < 1$、$\delta'(n) < 0$、$\delta(n) + \delta'(n)n > 0$、$2\delta'(n) + \delta''(n)n < 0$ を仮定する。

子の効用は消費および環境の汚染度に依存するものとし、子の効用関数を次のように定式化する。

$$U_1(c_1, \pi_1) = u_1[(1+r)b_1] - V_1(\pi_1) \tag{2}$$

ここで、π_1 は第１期の汚染度である。また、$u_1'>0$、$u_1''<0$、$V_1'>0$、$V_1''>0$ を仮定する。

親は$(1+r)b_0$、$\pi_i\,(i=0,1)$、β を所与として、（１）を最大化するように b_1 と n を選択する。すなわち、親の最適化問題は次のように定式化することができる。

（３）
$$\max_{b_1,n} u_0[(1+r)b_0-n(b_1+\beta)]-V_0(\pi_0)+n\delta(n)\{u_1[(1+r)b_1]-V_1(\pi_1)\}$$

b_1、n に関して内点解を仮定すれば、（３）の１階の条件は、次のように与えられる。

（４）
$$\frac{\partial U_0}{\partial b_1}=-nu_0'[(1+r)b_0-n(b_1+\beta)]+n\delta(n)(1+r)u_1'[(1+r)b_1]=0$$

（５）
$$\begin{aligned}\frac{\partial U_0}{\partial n}=&-(b_1+\beta)u_0'[(1+r)b_0-n(b_1+\beta)]\\&+[\delta(n)+n\delta'(n))]\{u_1[(1+r)b_1]-V_1(\pi_1)\}=0\end{aligned}$$

各期の環境の汚染度は各期の総生産の関数であり、その関係は線形であるとする。また、以前の期の汚染度には影響されないとする。すなわち、

（６）
$$\pi_i=\alpha Y_i \qquad (i=0,1)$$

と表される。ここで、Y_i は総生産、α（＞０）は排出係数である。

生産関数は

（７）
$$Y_i=AK_i \qquad (i=0,1)$$

で与えられる。ここで、生産技術は線形であり、人的資本を含む広い意味での資本ストック $K_i\,(i=0,1)$だけが生産に投入されるものとする。A（＞０）は生産性パラメータ（所与）である。

次に、資本市場均衡条件は次式で表される。

（８）
$$b_i=k_i \qquad (i=0,1)$$

ここで、$k_0\equiv K_0/N$、$k_1\equiv K_1/nN$ である。均衡においては次式が成立する。

（９）
$$1+r=A$$

なお、以下では、表記の簡略化のため k_1 を k で表す。

（６）、（７）、（８）、（９）を（４）と（５）にそれぞれ代入すると、

(10) $$F(k,n) \equiv -nu_0'[Ak_0 - n(k+\beta)] + n\delta(n)Au_1'(Ak) = 0$$

(11) $$G(k,n) \equiv -(k+\beta)u_0'[Ak_0 - n(k+\beta)] + [\delta(n) + n\delta'(n)]\{u_1(Ak) - V_1(\alpha ANnk)\} = 0$$

が得られる。(10)と(11)から競争均衡(k^*, n^*)が導かれる。

3．比較静学

この節では、排出係数αと養育費βの限界的な変化が、競争均衡における遺産、子の数および環境の汚染度にいかなる影響を与えるかについて検討を行う。

(10)と(11)をk、n、α、βで微分すると、次の式が導かれる。

(12) $$\begin{pmatrix} F_k & F_n \\ G_k & G_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dk \\ dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G_\alpha \end{pmatrix} d\alpha + \begin{pmatrix} -F_\beta \\ -G_\beta \end{pmatrix} d\beta$$

ここで、

$$F_k \equiv \partial F/\partial k = n^2u_0'' + n\delta(n)A^2u_1'' < 0$$

$$F_n \equiv \partial F/\partial n = n(k+\beta)u_0'' - u_0' + [\delta(n) + n\delta'(n)]Au_1'$$

$$= n(k+\beta)u_0'' + n\delta'(n)Au_1' < 0$$

$$G_k \equiv \partial G/\partial k = n(k+\beta)u_0'' - u_0' + [\delta(n) + n\delta'(n)](Au_1' - \alpha ANnV_1')$$

$$= n(k+\beta)u_0'' + n\delta'(n)Au_1' - [\delta(n) + n\delta'(n)]\alpha ANnV_1' < 0$$

$$G_n \equiv \partial G/\partial n = (k+\beta)^2u_0'' + [2\delta'(n) + n\delta''(n)](u_1 - V_1) - [\delta(n) + n\delta'(n)]\alpha NAkV_1' < 0$$

$$F_\beta \equiv \partial F/\partial \beta = n^2u_0'' < 0$$

$$G_\alpha \equiv \partial G/\partial \alpha = -[\delta(n) + n\delta'(n)]ANnkV_1' < 0$$

$$G_\beta \equiv \partial G/\partial \beta = -u_0' + n(k+\beta)u_0'' < 0$$

である。

3.1　排出係数の変化

(12)より、以下の式が導かれる。

(13) $$\frac{dk}{d\alpha} = \frac{1}{\tilde{D}}(F_nG_\alpha) > 0$$

(14) $$\frac{dn}{d\alpha} = \frac{-1}{\tilde{D}}(F_kG_\alpha) < 0$$

ここで、

(15)
$$\tilde{D} \equiv F_k G_n - F_n G_k > 0$$

である[1]。(13)と(14)より、以下の命題が導かれる。

命題 1　$\dfrac{dk}{d\alpha} > 0$、$\dfrac{dn}{d\alpha} < 0$

すなわち、排出係数 α が上昇した場合、当初の Y_1 の下で、汚染度 π_1 が高まることによって、子を持つことの限界純便益 $G(k, n)$ が低下するので、子の数 n は減少する。一方、子の数の減少に伴い、子一人当たりの遺産 $b_1(=k)$ は増加する。

次に、排出係数 α が汚染度 π_1 に与える影響をみる。$\pi_1 = \alpha ANnk$ を α で微分して、(13)と(14)を代入すると以下の式が得られる。

(16)
$$\begin{aligned}\frac{d\pi_1}{d\alpha} &= \frac{\partial\pi_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\pi_1}{\partial k}\frac{dk}{d\alpha} + \frac{\partial\pi_1}{\partial n}\frac{dn}{d\alpha} \\ &= AN\left[nk + \alpha\frac{G_\alpha}{\tilde{D}}(nF_n - kF_k)\right] \\ &= ANnk[1 + \eta_{n(\alpha)}(e_{k(n)} - 1)]\end{aligned}$$

ここで、$\eta_{n(\alpha)} \equiv -(\alpha/n)(dn/d\alpha) = (\alpha/n)(F_k G_\alpha/\tilde{D}) > 0$、$e_{k(n)} \equiv (n/k)(F_n/F_k) > 0$ である。F_n/F_k は(10)から導かれる dk/dn である。すなわち、(10)を満たすためには、n が変化したとき k がどれだけ変化しなければならないかを表したものである。$ANnk > 0$ に注意すれば、(16)より次の命題が得られる。

命題 2　$1 + \eta_{n(\alpha)}(e_{k(n)} - 1) > (<) 0 \Leftrightarrow \dfrac{d\pi_1}{d\alpha} > (<) 0$

命題 2 より、次のことが分かる。第 1 に、$e_{k(n)} > 1$ ならば、α の上昇は常に汚染度を高める。$e_{k(n)} > 1$ の場合には、α の増加によって子の数が減少したとき、家族の総遺産はかえって増加する[2]。総遺産の増加は総生産の増加を意味するから、α の上昇によって汚染

1　補論を参照。

2　(16)より以下の関係が成立する。

$$\eta_{nk(\alpha)} \equiv \frac{\alpha}{nk}\frac{d(nk)}{d\alpha} = \frac{\alpha}{nk}\left(n\frac{dk}{d\alpha} + k\frac{dn}{d\alpha}\right) = \eta_{n(\alpha)}(e_{k(n)} - 1)$$

これより、$e_{k(n)} > 1$ ならば $\eta_{nk(\alpha)} > 0$ である。

度は上昇することになる。第2に、$(0<)\eta_{n(\alpha)}<1$ ならば、やはり α の上昇は汚染度を高める。これは子の数が α の上昇に対してあまり反応しないケースであり、このケースでは、$e_{k(n)}$ の値にかかわらず、汚染度が上昇することに注意する必要がある。これは、総遺産 nk が減少したとしても、π_1 に対する α の直接効果が常にその効果を凌駕することを意味する。第3に、$e_{k(n)}<1$ および $\eta_{n(\alpha)}>1$ のときに、α の上昇によって汚染度が低下する可能性が生じる。すなわち、α の上昇に対して n がかなり敏感に反応し、それによって総遺産 nk が減少することが、$d\pi_1/d\alpha<0$ となるための必要条件である。

第3のケースは環境と人口(子の数)との相互作用という点からは非常に興味深いケースである。これは、α が上昇したとき子の数が大幅に減少するならば、それにより家族の総遺産（総生産）が π_1 に対する α の直接効果を凌ぐほどに減少する可能性があり、その場合は汚染度が下がることを示している。

3.2　養育費の変化

養育費の変化が子の数に与える効果を調べる。(12)より以下の式が導かれる。

(17)
$$\frac{dn}{d\beta}=\frac{1}{\tilde{D}}(-G_\beta F_k+F_\beta G_k)$$

$(dk/d\beta)_{n=\text{const}}=-F_\beta/F_k\ (<0)$[3]、および、$G_\beta$ と G_k の定義を用いて(17)を書き換えると、以下の式を得る。

(18)
$$\frac{dn}{d\beta}=\frac{-F_k}{\tilde{D}}\left\{[-u_0'+n(k+\beta)u_0'']\left[1+\left(\frac{dk}{d\beta}\right)_{n=\text{const}}\right]\right.$$
$$\left.+[\delta+n\delta'(n)](Au_1'-\alpha ANnV_1')\left(\frac{dk}{d\beta}\right)_{n=\text{const}}\right\}$$

ここで、$[1+(dk/d\beta)_{n=\text{const}}]>0$ より[4]、次の命題が得られる。

命題 3　$u_1'-\alpha NnV_1'\geq 0$ ならば、$\dfrac{dn}{d\beta}<0.$

この命題は、子の効用が遺産の増加（減少）によって下がる（上がる）ことがないならば、養育費の増加により子の数が減少することを表している。(18)の右辺の第1項は、n を所与とした場合、養育費の増加によって遺産と養育費の合計が増加するため、子を持

3　n を所与として、(10)を k と β で微分すると得られる。

4　$1+\left(\frac{dk}{d\beta}\right)_{n=\text{const}}=1-\frac{F_\beta}{F_k}=\frac{1}{F_k}(F_k-F_\beta)=\frac{1}{F_k}[n\delta(n)A^2u_1'']>0$

つことの限界費用が増加することを表している。第２項は、n を所与とした場合の子を持つことの限界便益の変化を表している。養育費の増加によって遺産は減少するが、$Au_1' - \alpha ANnV_1' \geq 0$ を仮定するならば、それによって子の効用が上がることはないので、子を持つことの限界便益は低下する。このとき、限界純便益は低下するので、子の数は減少することになる。

命題３の遺産の増加によって子の効用が下がることはないという条件は、ある一つの家族のみが遺産を変化させる場合には妥当するかもしれないが、実際にはすべての家族が遺産を変化させていることに注意する必要がある。このとき、それが環境に与える影響は無視できないほど大きくなる可能性がある。すなわち、n を所与とした場合、養育費の増加によって遺産は減少するが、それによって環境が改善する効果が子の消費を減少させる効果を凌ぐならば、子の効用はむしろ増加する。そしてこれが非常に大きいならば、子を持つことの限界純便益が増加し、子の数は増加する。このケースは環境と人口の相互作用という観点からは、興味深いケースである。養育費の増加は、環境への影響を通じて、子の数をむしろ増加させる可能性がある。

次に、養育費 β の変化が子一人当たりの遺産 k に与える効果を調べる。(12)より以下の式が導かれる。

$$\frac{dk}{d\beta} = \frac{1}{\tilde{D}}(-F_\beta G_n + G_\beta F_n) \tag{19}$$

$(dn/d\beta)_{k=\mathrm{const}} = -G_\beta / G_n\ (<0)$[5]、および、$F_\beta$ と F_n の定義を用いて(19)を書き換えると、以下の式を得る。

$$\frac{dk}{d\beta} = \frac{-G_n}{\tilde{D}}\left\{nu_0''\left[n + (k+\beta)\left(\frac{dn}{d\beta}\right)_{k=\mathrm{const}}\right] + n\delta'(n)Au_1'\left(\frac{dn}{d\beta}\right)_{k=\mathrm{const}}\right\} \tag{20}$$

(20)の右辺の第１項は、$(dc_0/d\beta)_{k=\mathrm{const}} = -[n + (k+\beta)(dn/d\beta)_{k=\mathrm{const}}]$ であることに注意すると、k を所与とした場合に、養育費の増加が、親の消費を通じて、いかに遺産の限界費用を変化させるかを表している。養育費の増加によって n が減少するため、総養育費と総遺産の合計 $n(k+\beta)$（したがって親の消費）が増加するか、減少するかは不定である。養育費が増加したとき、親の消費が増加（減少）するならば、遺産の限界費用は減少（増加）する。また、第２項は、k を所与とした場合に、養育費の増加によって n が減少し、それによる親が子の効用におくウエイトの増加が遺産の限界便益を増加させることを表している。以上の２つの効果より、一般的に $dk/d\beta$ の符号は定まらないが、

5　k を所与として、(11)を n と β で微分すると得られる。

$(dc_0/d\beta)_{k=\mathrm{const}} > 0$ であるならば遺産の限界純便益は増加するので、子一人当たりの遺産は増加する。以上より、次の命題が導かれる。

命題 4 $\left(\dfrac{dc_0}{d\beta}\right)_{k=\mathrm{const}} > 0 \Rightarrow \dfrac{dk}{d\beta} > 0$

次に、養育費 β が汚染度 π_1 に与える影響をみる。$\pi_1 = \alpha ANnk$ を β で微分して、(17) と(19)を代入すると以下の式が得られる。

(21)
$$\begin{aligned}\frac{d\pi_1}{d\beta} &= \alpha AN\left(n\frac{dk}{d\beta}+k\frac{dn}{d\beta}\right)\\ &= \alpha AN\frac{nk}{\beta}\left\{\frac{\beta}{n}\left(\frac{-G_\beta F_k+F_\beta G_k}{\tilde{D}}\right)\left[\frac{n}{k}\left(\frac{-F_n}{F_k}\right)+1\right]+\frac{\beta}{k}\left(\frac{-F_\beta}{F_k}\right)\right\}\\ &= \alpha AN\frac{nk}{\beta}\left[-\eta_{n(\beta)}(e_{k(n)}-1)-e_{k(\beta)}\right]\end{aligned}$$

ここで、$\eta_{n(\beta)} \equiv (\beta/n)(dn/d\beta) = (\beta/n)[(-G_\beta F_k + F_\beta G_k)/\tilde{D}]$、$e_{k(\beta)} \equiv (\beta/k)(F_\beta/F_k) > 0$ である。$\alpha ANnk/\beta > 0$ なので、(21)より次の命題が得られる。

命題 5 $-\eta_{n(\beta)}(e_{k(n)}-1) > (<)\, e_{k(\beta)} \Leftrightarrow \dfrac{d\pi_1}{d\beta} > (<)\, 0$

命題 5 より次のことが分かる。$\eta_{n(\beta)} < 0$ $(dn/d\beta < 0)$ のときは、$e_{k(n)} < 1$ ならば、養育費の増加は常に汚染度を低める。すなわち、養育費の増加によって子の数が減少するときには、$e_{k(n)} < 1$ ならば、常に家族の総遺産(＝総生産)が減少するので、汚染度は低下することになる[6]。$e_{k(n)} > 1$ の場合には、$d\pi_1/d\beta$ の符号は確定しない。

一方、$\eta_{n(\beta)} > 0$ $(dn/d\beta > 0)$ のときは、$e_{k(n)} > 1$ ならば、養育費の上昇は常に汚染度を低める。すなわち、養育費の増加によって子の数が増加するときには、$e_{k(n)} > 1$ ならば、常に家族の総遺産（＝総生産）が減少するので、汚染度は低下することになる。$e_{k(n)} < 1$ の場合には、$d\pi_1/d\beta$ の符号は確定しない。

3.3 数値分析

本節では、前節の比較静学の結果を数値例によって検討する。そこで、最初に 2 節で記述されたモデルの関数型を特定化して、各パラメータの基準値を設定する。各世代が消費から得る効用は、消費量に対する効用の弾力性が一定の関数 $u(c) = c^\sigma$ で与えられる

6 $\eta_{nk(\beta)} \equiv (\beta/nk)(d(nk)/d\beta) = -\eta_{n(\beta)}(e_{k(n)}-1) - e_{k(\beta)}$ が成立する。

と仮定する[7]。ただし、$0<\sigma<1$ である。ここでは簡単化のため、消費からの効用関数は親の世代と子の世代で同じであると仮定する。また、各世代が環境の汚染から受ける不効用は、Stokey (1998) にしたがい、弾力性一定の関数 $V(\pi)=B\pi^{\nu}/\nu$ で与えられると仮定する。ただし、$B>0$、$\nu>1$ である[8]。ここでも、環境汚染からの不効用は両方の世代について同じ関数で表されると仮定する。親の効用関数の中で子の一人当たり効用に付されるウエイト $\delta(n)$ は、Becker and Barro (1988) にしたがい、子の数に関する弾力性が一定の形 $\delta(n)=\xi n^{-\varepsilon}$ を仮定する。ただし、$\xi>0$、$0<\varepsilon<1$ である[9]。

次に、各パラメータの基準値を定める。まず、親の世代の人口を 1 に基準化する。また、親の世代の初期資産 b_0 を 1 とする。生産性パラメータ A の値は2.666に設定する。この値は、1期を25年としたときの年利子率4％に対応している（すなわち $2.666\approx(1+0.04)^{25}$）。排出係数 α の基準値を0.15とする。また、上で特定化した各関数のパラメータの基準値は、それぞれ $\sigma=0.6$、$B=1$、$\nu=2$、$\xi=0.65$、$\varepsilon=0.2$ とする。さらに、1人当たりの子供の養育費 β の基準値を0.25に設定する。そのとき、各パラメータがそれぞれの基準値をとる場合の競争均衡において、所得に占める養育費の割合 $(=Nn\beta/Y_0)$ は約12％になる。また、基準値の下では、親が子一人当たりの効用におくウエイト $\delta(n)$ は約0.6となる。

いま、各パラメータが基準値をとるときの競争均衡の決定式は

$$F=-0.6n[2.666-n(k+0.25)]^{-0.4}+1.04n^{0.8}(2.666k)^{-0.4}=0$$

$$\begin{aligned}G=&-0.6(k+0.25)[2.666-n(k+0.25)]^{-0.4}\\&+0.52n^{-0.2}\{(2.666k)^{0.6}-(0.4nk)^2/2\}=0\end{aligned}$$

となる。図1は、これらの式を $k-n$ 平面にプロットしたものである。競争均衡は、これら二つの曲線の交点の座標で与えられる。図1において、その値は $k^*=1.156$、$n^*=1.271$ となっている。

3.3.1　α の変化が各内生変数に及ぼす効果

最初に、排出係数 α の値を動かして、それが k、n、および、π の各均衡値に及ぼす効

7　このとき、効用の弾力性は $cu'(c)/u(c)=\sigma$ で与えられる。また、限界効用の弾力性も、$-cu''(c)/u'(c)=1-\sigma$ となり一定である。

8　このとき、関数 V は $V'(\pi)=B\pi^{\nu-1}>0$、および $V''(\pi)=B(\nu-1)(\pi)^{\nu-2}>0$ を満たす。

9　このとき、関数 $\delta(n)$ は $\delta'(n)=-\varepsilon\xi n^{-\varepsilon-1}<0$、$\delta(n)+n\delta'(n)=\xi(1-\varepsilon)n^{-\varepsilon}>0$、および $2\delta'(n)+n\delta''(n)=-\xi\varepsilon(1-\varepsilon)n^{-\varepsilon-1}<0$ を満たす。

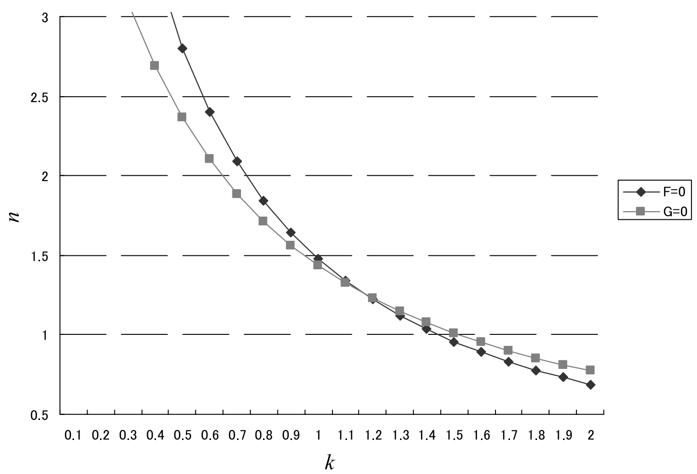

図１　競争均衡の決定　（数値例）

果をみよう。ここでは、α の値を0.01から0.25まで動かしたときの k 、n 、および、π の各均衡値を計算した。また、親が子の効用に置くウエイト $\delta(n)$ のレベルを決めるパラメータ ξ の値を、その基準値 $\xi=0.65$ のほかに、それよりも小さい場合 $(\xi=0.55)$ と大きい場合 $(\xi=0.75)$ についても、同様に各均衡値を計算した。図2-1～図2-3 および表１がその結果である。

まず、k および n に対する α の効果は、命題１で示されたように、図2-1における α と k の間の右上がりの関係 $(dk/d\alpha>0)$、および、図2-2における α と n の間の右下がりの関係 $(dn/d\alpha<0)$ に表れている。また、異なる ξ の値の下での結果を比較すると、親が子の効用におくウェイトが大きくなるほど、α が n および k に及ぼす効果が強まることがわかる。

次に、π に対する α の効果は、命題２に述べられているように、条件に依存して正の場合も負の場合も起こり得る。しかし、ここで用いたパラメータの基準値の周辺では、α の上昇は π の値を引き上げる $(d\pi/d\alpha>0)$。そこで、命題２に示された条件を検討してみよう。パラメータの各組み合わせについて、$\eta_{n(\alpha)}$、$e_{k(n)}$、および、$1+\eta_{n(\alpha)}(e_{k(n)}-1)$ の値を計算したものが表２である。

表２に示されているように、ξ が大きいほど、また α が小さいほど、$e_{k(n)}$ は大きくなっている。$\xi=0.55$ の場合は $e_{k(n)}<1$ であるが、$\xi=0.65$、$\xi=0.75$ の場合は、α が小さいとき $e_{k(n)}>1$ である。他方、$\eta_{n(\alpha)}$ については、ξ が大きいほど、また α が大きいほど、大きくなっている。いずれの ξ の値についても、α が小さいときは $\eta_{n(\alpha)}<1$ であるが、α

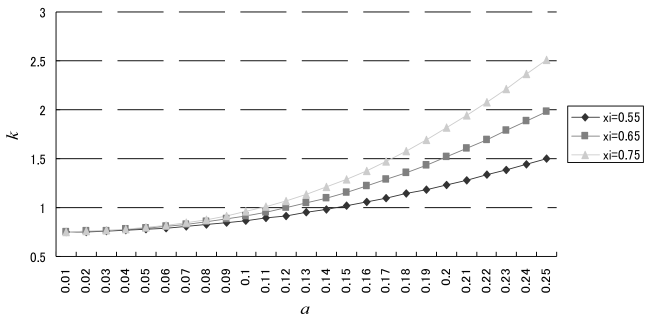

図2-1　α の各値に対する k の値

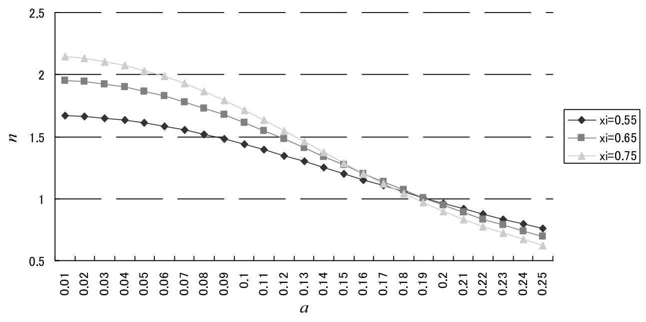

図2-2　α の各値に対する n の値

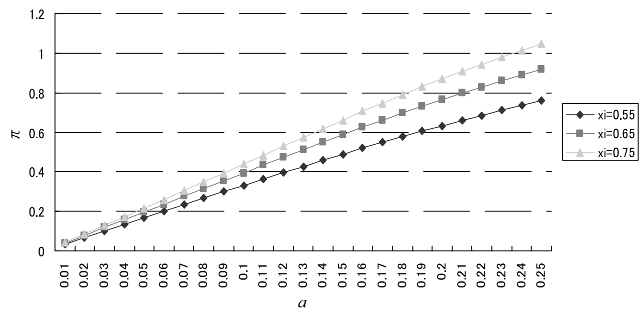

図2-3　α の各値に対する π の値

が大きくなると（$\alpha \geq 0.22$）、$\eta_{n(\alpha)} > 1$ となる。

いま、α の値が小さい場合を考えよう。このときには、$\eta_{n(\alpha)} < 1$ であるため、α の変化に対して n は非弾力的にしか反応せず、α の上昇による n の減少は小さい。一方で、n の減少に対する k の反応は ξ の値によって異なる。$\xi = 0.55$ のときには $e_{k(n)} < 1$ である

表1　α の変化が各変数に及ぼす効果

	k			n			π		
α	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75
0.05	0.7780	0.7889	0.7974	1.6099	1.8663	2.0333	0.1669	0.1963	0.2161
0.1	0.8653	0.9164	0.9601	1.4377	1.6125	1.7133	0.3316	0.3940	0.4385
0.15	1.0174	1.1562	1.2888	1.2020	1.2707	1.2847	0.4890	0.5875	0.6621
0.2	1.2333	1.5175	1.8147	0.9620	0.9453	0.8983	0.6326	0.7648	0.8691
0.25	1.5013	1.9806	2.5123	0.7579	0.6956	0.6258	0.7583	0.9182	1.0477

表2　命題2の条件

	(1) $\eta_{n(\alpha)}$			(2) $e_{k(n)}$			(3) $1+\eta_{n(\alpha)}(e_{k(n)}-1)$		
α	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75
0.05	0.0788	0.0965	0.1090	0.9204	1.0469	1.1323	0.9937	1.0045	1.0144
0.1	0.3049	0.3906	0.4606	0.8926	1.0047	1.0794	0.9673	1.0018	1.0366
0.15	0.6250	0.8253	1.0041	0.8544	0.9481	1.0100	0.9090	0.9572	1.0101
0.2	0.9418	1.2325	1.4900	0.8146	0.8925	0.9456	0.8254	0.8675	0.9189
0.25	1.1855	1.5027	1.7736	0.7788	0.8462	0.8953	0.7378	0.7689	0.8143

から、n の減少に対して k は大きく増加せず、その結果、総遺産 nk は減少する。しかし、α の上昇による直接的な排出の増加に比べてその減少幅は小さく、結果的に π は上昇している。他方、$\xi=0.65$、および、$\xi=0.75$ のときには、$e_{k(n)}>1$ であるから、n の減少に対して k が大きく増加し、その結果、nk は増加する。さらに、α の上昇によって直接的にも排出は増加し、π は上昇する。

次に、α の値が大きい場合を考えよう。このときは、いずれの ξ の値に対しても $\eta_{n(\alpha)}>1$ かつ $e_{k(n)}<1$ となっており、α の上昇は n を大きく引き下げるが、それに対して k は大きく増加しないため、nk が減少する。しかし、ここで考えているパラメータの範囲では、α の上昇による直接的な排出増加に比べてその減少幅は小さく、π は上昇する。

3.3.2　β の変化が各内生変数に及ぼす効果

次に、養育費 β の変化が k、n、および、π に及ぼす効果をみよう。ここでも、$\xi=0.55$、$\xi=0.65$、$\xi=0.75$ の各ケースについて、β の値を0.15から0.35まで動かしたと

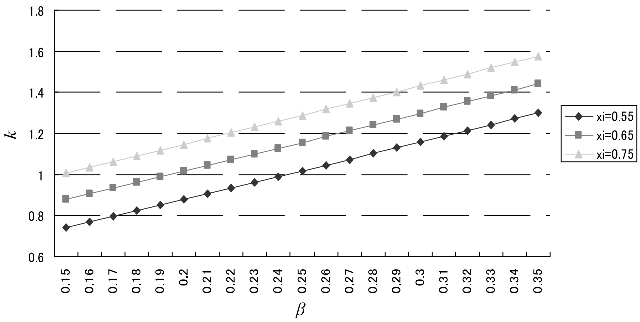

図3-1　β の各値に対する k の値

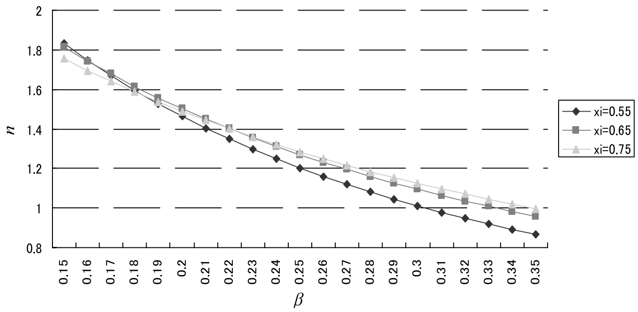

図3-2　β の各値に対する n の値

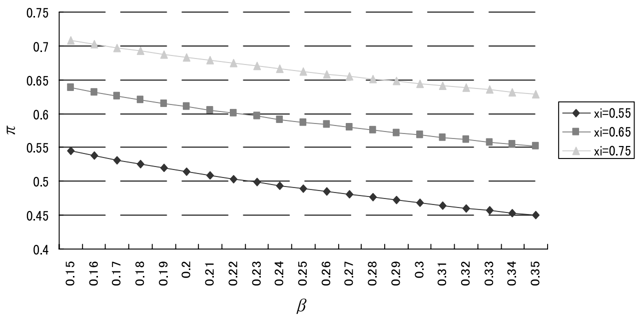

図3-3　β の各値に対する π の値

きの k、n、および、π の均衡値を計算した。図3-1～図3-3および表３がその結果である。

3.2節でみたように、β の変化が k、n、および、π に与える効果は、条件に依存して、正の場合も負の場合も起こり得る。しかし、ここで用いたパラメータ値の下では、ξ の値に関わらず、それぞれの効果の符号は確定した。すなわち、β の上昇に伴い、k は増加

表 3　β の変化が各変数に及ぼす効果

	k			n			π		
β	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75
0.15	0.7421	0.8791	1.0096	1.8345	1.8145	1.7550	0.5444	0.6378	0.7085
0.2	0.8785	1.0160	1.1472	1.4629	1.5017	1.4887	0.5139	0.6101	0.6830
0.25	1.0174	1.1562	1.2888	1.2020	1.2707	1.2847	0.4890	0.5875	0.6621
0.3	1.1579	1.2982	1.4326	1.0108	1.0948	1.1250	0.4680	0.5683	0.6445
0.35	1.2995	1.4412	1.5777	0.8656	0.9573	0.9974	0.4498	0.5517	0.6293

表 4　命題 3，命題 4 および命題 5 の条件

	(1) $u_1'-\alpha NnV_1'$			(2) $(dc_0/d\beta)_{k=const.}$			(3) $\eta_{n(\beta)}$		
β	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75
0.15	0.3069	0.2532	0.2173	0.8207	0.6703	0.5517	−0.6213	−0.6050	−0.6115
0.2	0.3141	0.2653	0.2312	0.8037	0.6617	0.5429	−0.7199	−0.7096	−0.7230
0.25	0.3144	0.2705	0.2386	0.7671	0.6402	0.5265	−0.7928	−0.7869	−0.8058
0.3	0.3113	0.2718	0.2423	0.7251	0.6142	0.5075	−0.8496	−0.8466	−0.8693
0.35	0.3066	0.2710	0.2436	0.6830	0.5872	0.4880	−0.8956	−0.8946	−0.9198

(4) $e_{k(n)}$			(5) $e_{k(\beta)}$			(6) $-\eta_{n(\beta)}(e_{k(n)}-1)-e_{k(\beta)}$		
ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75	ξ=0.55	ξ=0.65	ξ=0.75
0.8708	0.9469	0.9956	0.1067	0.1137	0.1135	−0.1870	−0.1458	−0.1162
0.8637	0.9495	1.0051	0.1138	0.1270	0.1306	−0.2119	−0.1628	−0.1269
0.8544	0.9481	1.0100	0.1168	0.1353	0.1426	−0.2322	−0.1761	−0.1345
0.8444	0.9445	1.0121	0.1176	0.1405	0.1512	−0.2497	−0.1875	−0.1407
0.8344	0.9397	1.0122	0.1171	0.1438	0.1574	−0.2654	−0.1977	−0.1462

し、n は減少し、π は低下するという結果が得られた。そこで、命題３、命題４、および命題５の各条件の検討を行った。その結果をまとめたものが表４である。

表４の(１)は、β と ξ の各組み合わせにおける $u_1'-\alpha NnV_1'$ の値を示している。パラメータのすべての組み合わせについて $u_1'-\alpha NnV_1'$ は正になっている。すなわち、n を一定としたときに遺産の増加は子の効用を引き上げる。このとき、命題３で示されたように、β の上昇に伴い n は減少する。

表４の(２)は、β と ξ の各組み合わせにおける $(dc_0/d\beta)_{k=\mathrm{const}}$ の値を示している。パラ

メータのすべての組み合わせについて$(dc_0/d\beta)_{k=\mathrm{const}}>0$となっており、命題4で示されたように、$\beta$ の上昇に伴い k は増加する。

表4の(3)、(4)、(5)は、それぞれ β と ξ の各組み合わせにおける $\eta_{n(\beta)}$、$e_{k(n)}$、および $e_{k(\beta)}$ の値を示している。いま考えているパラメータの範囲では $dn/d\beta<0$ となることからもわかるように、(3)において、常に $\eta_{n(\beta)}<0$ が成立している。他方、(4)より、$e_{k(n)}$ は、ξ が小さいとき（$\xi=0.55$ および $\xi=0.65$）には $0<e_{k(n)}<1$ となっているが、ξ が大きいとき（$\xi=0.75$）には、（$\beta=0.15$ の場合を除いて）$e_{k(n)}>1$ となっている。しかし、いずれの場合も、$-\eta_{n(\beta)}(e_{k(n)}-1)$ の値は(5)に示されている $e_{k(\beta)}$ の値より小さい。すなわち、$-\eta_{n(\beta)}(e_{k(n)}-1)<e_{k(\beta)}$ が成り立っているため、命題5が示すとおり、β の上昇によって π は減少する。

4．社会的最適解

この節では、社会的に最適な遺産、子の数、および環境の汚染度を導出して、競争均衡におけるそれらとの比較を行う。

4.1　社会的最適解の導出

中央計画者（政府）は社会的最適解を導出するにあたって、功利主義的な社会的厚生関数を採用するものとする。そして、社会的割引率と親の子の効用に対する割引率は等しいものと仮定する。中央計画者は、k_0 を所与として、資源制約の下で、社会的厚生を最大にするように、k と n を選択する。すなわち、中央計画者の最適化問題は次のように定式化することができる。

$$(22)\qquad \max_{k,n} N\{u_0[Ak_0-n(k+\beta)]-V_0(\pi_0(AK_0))+n\delta(n)[u_1(Ak)-V_1(\alpha ANnk)]\}$$

k と n に関して内点解を仮定すれば、(22)の1階の条件は次のように与えられる。

$$(23)\qquad \frac{\partial U_0}{\partial k}=-nu_0'[Ak_0-n(k+\beta)]+n\delta(n)[Au_1'(Ak)-\alpha ANnV_1'(\alpha ANnk)]=0$$

$$(24)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial U_P}{\partial n}=&-(k+\beta)u_0'[Ak_0-n(k+\beta)]\\&+[\delta(n)+n\delta'(n)][u_1(Ak)-V_1(\alpha ANnk)]\\&-n\delta(n)\alpha ANkV_1'(\alpha ANnk)=0\end{aligned}$$

(23)と(24)から社会的最適解(k^S,n^S)が導出される。

4.2 競争均衡解と社会的最適解との比較

最初に、競争均衡解と社会的最適解との比較をするにあたって、本モデルにおける k と n の外部性について考えてみる。まず、k に関しては、競争均衡における１階の条件(10)と社会的最適解の１階の条件(23)とを比較すると、遺産は、生産の増加を通じて、第１期の環境を悪化させるが、家計はこれを認識していないため、遺産の社会的な限界純便益は、私的な限界純便益に比べて、$n\delta(n)\alpha ANnV_1'$ だけ小さくなる。次に、n に関しても、競争均衡における１階の条件(11)と社会的最適解の１階の条件（24）とを比較すると、子の数が増加すると第１期の環境は悪化するが、家計はこれを認識していないため、子を持つことの社会的な限界純便益は、私的な限界純便益に比べて、$n\delta(n)\alpha ANkV_1'$ だけ小さくなる。

しかし、以上の議論は、k と n（あるいは、(10)と(11)）を独立に考えた場合の議論であり、実際には k と n には相互作用が存在する。例えば、k の増加は、子を持つことの限界費用を増加させ、n に対して負の効果を及ぼすから、k の過剰性は n の過剰性を弱めるか、あるいは、n の過少性をもたらす可能性がある。また、逆に、n の過剰性が、社会的最適解と比べて、遺産の限界費用を増加させ、k の過少性をもたらすことも考えられる。本節では、このような k と n との相互作用を考慮して、特に n に焦点をあて、それが過少となる条件を導出する。

競争均衡の条件(10)、(11)と社会的最適の条件(23)、(24)に基づいて、以下のような関数を考える。

$$(25)\quad \hat{F}(k,n;\theta)\equiv -nu_0'[Ak_0-n(k+\beta)]+n\delta(n)Au_1'(Ak)$$
$$-\theta[n\delta(n)\alpha ANnV_1'(\alpha ANnk)]=0$$

$$(26)\quad \hat{G}(k,n;\theta)\equiv -(k+\beta)u_0'[Ak_0-n(k+\beta)]$$
$$+[\delta(n)+n\delta'(n)][u_1(Ak)-V_1(\alpha ANnk)]$$
$$-\theta[n\delta(n)\alpha ANkV_1'(\alpha ANnk)]=0$$

(25)、(26)の解を $(k(\theta),n(\theta))$ と定義する。ここで、(25)と(26)は、$\theta=0$ のときには競争均衡の条件である(10)と(11)に一致し、$\theta=1$ のときには社会的最適の条件である(23)と(24)に一致する。すなわち、$k(0)=k^*$、$n(0)=n^*$、$k(1)=k^S$、$n(1)=n^S$ となる。

(25)と(26)を k、n、θ で微分すると、次の式が導かれる。

(27)
$$\begin{pmatrix} \hat{F}_k(\theta) & \hat{F}_n(\theta) \\ \hat{G}_k(\theta) & \hat{G}_n(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dk(\theta) \\ dn(\theta) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \hat{F}_\theta \\ \hat{G}_\theta \end{pmatrix} d\theta$$

ここで、

(28) $\hat{F}_k(\theta) = n^2 u_0'' + n\delta(n) A^2 u_1'' - \theta n\delta(n)(\alpha ANn)^2 V_1'' < 0$

(29)
$$\begin{aligned} \hat{F}_n(\theta) &= n(k+\beta)u_0'' - u_0' + (\delta(n) + n\delta'(n))Au_1' \\ &\quad - \theta\{[2\delta(n) + n\delta'(n)]\alpha ANnV_1' + n\delta(n)(\alpha AN)^2 nkV_1''\} \\ &= n(k+\beta)u_0'' + n\delta'(n)Au_1' \\ &\quad - \theta\{[\delta(n) + n\delta'(n)]\alpha ANnV_1' + n\delta(n)(\alpha AN)^2 nkV_1''\} < 0 \end{aligned}$$

(30)
$$\begin{aligned} \hat{G}_k(\theta) &= n(k+\beta)u_0'' - u_0' + [\delta(n) + n\delta'(n)](Au_1' - \alpha ANnV_1') \\ &\quad - \theta[n\delta(n)\alpha ANV_1' + n\delta(n)(\alpha AN)^2 nkV_1''] \\ &= n(k+\beta)u_0'' + n\delta'(n)Au_1' - [\delta(n) + n\delta'(n)]\alpha ANnV_1' \\ &\quad - \theta[n\delta(n)(\alpha AN)^2 nkV_1''] < 0 \end{aligned}$$

(31)
$$\begin{aligned} \hat{G}_n(\theta) &= (k+\beta)^2 u_0'' + [2\delta'(n) + n\delta''(n)](u_1 - V_1) - [\delta(n) + n\delta'(n)]\alpha ANkV_1' \\ &\quad - \theta\{[\delta(n) + n\delta'(n)]\alpha ANkV_1' + n\delta(n)(\alpha ANk)^2 V_1''\} < 0 \end{aligned}$$

(32) $\hat{F}_\theta = -n\delta(n)\alpha ANnV_1' < 0$

(33) $\hat{G}_\theta = -n\delta(n)\alpha ANkV_1' < 0$

である。

$\hat{G}_\theta = \hat{F}_\theta k/n$ に注意すると、(27)より以下の式が導かれる。

(34)
$$\begin{aligned} \frac{dk(\theta)}{d\theta} &= \frac{1}{D(\theta)}[-\hat{F}_\theta \hat{G}_n(\theta) + \hat{G}_\theta \hat{F}_n(\theta)] \\ &= \frac{\hat{F}_\theta}{D(\theta)}\left[\frac{k}{n}\hat{F}_n(\theta) - \hat{G}_n(\theta)\right] \end{aligned}$$

(35)
$$\begin{aligned} \frac{dn(\theta)}{d\theta} &= \frac{1}{D(\theta)}[-\hat{G}_\theta \hat{F}_k(\theta) + \hat{F}_\theta \hat{G}_k(\theta)] \\ &= \frac{\hat{F}_\theta}{D(\theta)}\left[-\frac{k}{n}\hat{F}_k(\theta) + \hat{G}_k(\theta)\right] \end{aligned}$$

ここで、

(36) $D(\theta) \equiv \hat{F}_k(\theta)\hat{G}_n(\theta) - \hat{F}_n(\theta)\hat{G}_k(\theta) > 0$ (for all $0 \leq \theta \leq 1$)

である[10]。以下では、

(37) $$\frac{dk(\theta)}{d\theta} > (<) 0 \Rightarrow k^* < (>) k^S$$

(38) $$\frac{dn(\theta)}{d\theta} > (<) 0 \Rightarrow n^* < (>) n^S$$

となることに注意して分析を進める。

$n^* < n^S$ となるための十分条件を求める前に、n^* が n^S と比べて過少であるならば、k^* は k^S と比べて過剰となっていることを示す。前述のように、子を持つことが環境に対して外部不経済をもたらすということからすれば、n^* は過剰に選ばれる傾向があるので、n^* が過少になるとすれば、k^* の過剰性が子を持つことの私的限界費用を引き上げているはずである。

命題 6　$n^* < n^S \Rightarrow k^* > k^S$

証明：(35)と(38)より、

(39) $$-\frac{k}{n}\hat{F}_k(\theta) + \hat{G}_k(\theta) < 0$$

であれば、$n^* < n^S$ である。(39)の両辺に $\hat{G}_n(\theta)(<0)$ をかけると、

(40) $$\hat{G}_k(\theta)\hat{G}_n(\theta) > \frac{k}{n}\hat{F}_k(\theta)\hat{G}_n(\theta)$$

となる。また、(34)と(37)より、

(41) $$\frac{k}{n}\hat{F}_n(\theta) - \hat{G}_n(\theta) > 0$$

であれば、$k^* > k^S$ である。(41)の両辺に $\hat{G}_k(\theta)(<0)$ をかけると、

(42) $$\hat{G}_k(\theta)\hat{G}_n(\theta) > \frac{k}{n}\hat{F}_n(\theta)\hat{G}_k(\theta)$$

となる。また、(36)より、

(43) $$\hat{F}_k(\theta)\hat{G}_n(\theta) - \hat{F}_n(\theta)\hat{G}_k(\theta) > 0 \qquad (\text{for all } 0 \le \theta \le 1)$$

が成立する。(43)の両辺に k/n をかけると、

10　補論を参照。

(44) $$\frac{k}{n}\hat{F}_k(\theta)\hat{G}_n(\theta) > \frac{k}{n}\hat{F}_n(\theta)\hat{G}_k(\theta)$$

が得られる。よって、(40)⇒(42)となるので、$n^* < n^S \Rightarrow k^* > k^S$ が成立する。

命題6は、子一人当たりの遺産が過剰であることが、子の数が過少であるための必要条件になっていることを示している。

次に、n が過少となるための十分条件を検討する。(35)より、$D(\theta) > 0$ であるので、次式が満たされれば $n^* < n^S$ となる。

(45) $$-\hat{G}_\theta \hat{F}_k(\theta) + \hat{F}_\theta \hat{G}_k(\theta) > 0$$

(45) の両辺を $\hat{G}_n(\theta) < 0$ で割ると、

(46) $$\frac{\hat{G}_k(\theta)}{\hat{G}_n(\theta)} > \left(\frac{\hat{G}_\theta}{\hat{G}_n(\theta)}\right) / \left(\frac{\hat{F}_\theta}{\hat{F}_k(\theta)}\right)$$

が得られる。次に、(26)を k と n で微分すると、

(47) $$\left(-\frac{\partial n}{\partial k}\right)_{\hat{G}} = \frac{\hat{G}_k(\theta)}{\hat{G}_n(\theta)}$$

が得られる。さらに、(25)を k と θ、(26)を n と θ でそれぞれ微分すると、

(48) $$\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)_{\hat{F}} = -\frac{\hat{F}_\theta}{\hat{F}_k(\theta)}$$

(49) $$\left(\frac{\partial n}{\partial \theta}\right)_{\hat{G}} = -\frac{\hat{G}_\theta}{\hat{G}_n(\theta)}$$

が得られる。(47)－(49)を(46)に代入することにより、次式が得られる。

(50) $$\left(-\frac{\partial n}{\partial k}\right)_{\hat{G}} > \left(\frac{\partial n}{\partial \theta}\right)_{\hat{G}} / \left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)_{\hat{F}}$$

(50)は $n^* < n^S$ が成立するための十分条件である。(50)より、(i)遺産の変化に対して、n が敏感に反応するほど、(ii)k を固定したときの n の過剰性が小さいほど(すなわち、n の環境外部性が小さいほど)(iii)n を固定したときの k の過剰性が大きいほど(すなわち、k の環境外部性が大きいほど)、子の数が過少になる可能性は高まることがわかる。

次に、環境の汚染度について、競争均衡と社会的最適解との比較を行う。これについては、次の命題が成立する。

命題7　$\pi^* > \pi^S$

証明：$\pi_1 = \alpha ANnk$ を θ で微分し、(34)と(35)を代入すると、次式を得る[11]。

(51)
$$\frac{d\pi}{d\theta} = \frac{\hat{F}_\theta \alpha AN}{D(\theta)}\left[n\left(\frac{k}{n}F_n - G_n\right) + k\left(-\frac{k}{n}F_k + G_k\right)\right]$$

$G_k = F_n - [\delta(n) + n\delta'(n)]\alpha ANnV_1'$、$G_n = U_{nn} - [\delta(n) + n\delta'(n)]\alpha ANkV_1'$ ($U_{nn} \equiv \partial^2 U_0/\partial n^2$) より、上式は次のように書き換えられる。

(52)
$$\frac{d\pi}{d\theta} = \frac{-\hat{F}_\theta \alpha ANn}{D(\theta)}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^2 F_k - 2\frac{k}{n}F_n + U_{nn}\right]$$

$-\hat{F}_\theta \alpha ANn/D(\theta) > 0$ に注意すれば、親の効用最大化問題の2階の条件 $F_k U_{nn} - (F_n)^2 > 0$ より、

$$\frac{d\pi}{d\theta} < \frac{-\hat{F}_\theta \alpha ANn}{D(\theta)}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^2 F_k - 2\frac{k}{n}F_n + \frac{(F_n)^2}{F_k}\right]$$
$$= \frac{-\hat{F}_\theta \alpha ANn}{D(\theta)F_k}\left(\frac{k}{n}F_k - F_n\right)^2 < 0$$

が成立する。ゆえに、$\pi^* > \pi^S$ である。

すなわち、n あるいは k が過少であるか過剰であるかに関わらず、競争均衡における環境の汚染度は常に社会的に最適な水準よりも高くなる。

5．むすび

本論文では、子を持つことと子に対する所得移転（遺産）がともに環境に対して外部性を持つモデルを考え、環境と出産選択の相互作用の中で、競争均衡がいかなる性質を持つのかを検討した。主な結果は以下のとおりである。

第1に、排出係数の上昇は出生率を低下させ、遺産を増加させるが、その汚染水準への影響は一般的には定まらない。ただし、数値分析の結果によれば、ここで考えたパラメータの組合せの下では、汚染水準は上昇する。さらに、数値分析に基づけば、親の子に対する利他性が強まるほど、排出係数の上昇に対して出生率はより大きく低下する。

第2に、養育費の増加については、出生率、遺産および汚染水準のいずれに対する効

11　(28)－(31)より、$(k/n)\hat{F}_n(\theta) - \hat{G}_n(\theta) = (k/n)F_n - G_n$、$(k/n)\hat{F}_k(\theta) - \hat{G}_k(\theta) = (k/n)F_k - G_k$ となることがわかる。

果も一般的には不確定である。ただし、数値分析によれば、養育費の増加は、出生率の低下、遺産の増加、および、汚染水準の低下を招く。

第3に、子を持つことの環境外部性にもかかわらず、競争均衡における出生率は社会的最適解よりも低くなる可能性がある。ただし、子の数が過少であるためには遺産は過剰である必要がある。一方、汚染水準に関しては、常に社会的最適解よりも高くなる。この結果は、社会的最適解との比較において、少子化と環境悪化が同時に生じ得ることを意味している。

補論　$\tilde{D}>0$ および $D(\theta)>0$ の証明

2節のモデルにおいて、親は π_1 を所与として最適化問題を解いたが、平均資本ストックを $\overline{k}$、平均の子の数を $\overline{n}$ としたとき、$\pi_1=\alpha AN\overline{n}\,\overline{k}$ と表せるので、$\overline{k}$ と $\overline{n}$ を所与として問題を解くと考えても同じことである。したがって、ここでは、親は、$\overline{k}$ と $\overline{n}$ を所与として、次の効用関数を最大化すると考える。

(A1)　$$U_0=u_0[y_0-n(b_1+\beta)]-V_0(\pi_0)+n\delta(n)\{u_1[(1+r)b_1]-V_1(\alpha AN\overline{n}\,\overline{k})\}$$

b_1、n に関して内点解を仮定した場合の(A1)の効用最大化の1階の条件に、(8)と(9)を代入すると、以下の競争均衡条件式が得られる。

(A2)　$$-nu_0'[y_0-n(k+\beta)]+n\delta(n)Au_1'(Ak)=0$$

(A3)　$$-(k+\beta)u_0'[y_0-n(k+\beta)]+[\delta(n)+n\delta'(n)][u_1(Ak)-V_1(\alpha AN\overline{n}\,\overline{k})]=0$$

(A2)と(A3)より、k および n を $\overline{k}$ と $\overline{n}$ の関数として表すことができる。

(A4)　$$k=k(\overline{k},\overline{n})$$

(A5)　$$n=n(\overline{k},\overline{n})$$

ここで、家計が同質的であるという仮定より、均衡においては、

(A6)　$$k=\overline{k}$$

(A7)　$$n=\overline{n}$$

が成立しなければならない。以下では、(A6)と(A7)が成立するための安定性条件を用いて、$\tilde{D}>0$ および $D(\theta)>0$ を証明する。

(A2)と(A3)を k 、n 、$\overline{k}$ 、$\overline{n}$ で微分すると、次式を得る。

(A 8)
$$\begin{pmatrix} F_k & F_n \\ F_n & U_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dk \\ dn \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma_1 \end{pmatrix}d\,\overline{k}+\begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma_2 \end{pmatrix}d\,\overline{n}$$

ここで、

$$U_{nn} \equiv \partial^2 U_0/\partial n^2 = (k+\beta)^2 u_0'' + [2\delta'(n)+n\delta''(n)](u_1 - V_1) < 0$$
$$\gamma_1 \equiv -[\delta(n)+n\delta'(n)]\alpha AN\,\overline{n}\,V_1' < 0$$
$$\gamma_2 \equiv -[\delta(n)+n\delta'(n)]\alpha AN\,\overline{k}\,V_1' < 0$$

である。(A8)より、次式が得られる。

(A9)
$$\frac{\partial k}{\partial \overline{k}} = \frac{\gamma_1 F_n}{D} > 0$$

(A10)
$$\frac{\partial k}{\partial \overline{n}} = \frac{\gamma_2 F_n}{D} > 0$$

(A11)
$$\frac{\partial n}{\partial \overline{k}} = \frac{-\gamma_1 F_k}{D} < 0$$

(A12)
$$\frac{\partial n}{\partial \overline{n}} = \frac{-\gamma_2 F_k}{D} < 0$$

ここで、(A1)の親の効用最大化問題の2階の条件より

(A13)
$$D \equiv F_k U_{nn} - (F_n)^2 > 0$$

である。$k=\overline{k}$、$n=\overline{n}$ の安定性条件より、

(A14)
$$\left|\frac{\partial k}{\partial \overline{k}} + \frac{\partial n}{\partial \overline{n}}\right| < 1$$

が成立する[12]。(A9)と(A12)を(A14)に代入すると、

12　次のような動学方程式を考える。

$$\begin{cases} k_{t+1} = k(k_t, n_t) \\ n_{t+1} = n(k_t, n_t) \end{cases}$$

この均衡点では、$k_t = k_{t+1} = \overline{k}$、$n_t = n_{t+1} = \overline{n}$ が成立する。上式を $(\overline{k}, \overline{n})$ の周りで線形近似すると、

$$\begin{pmatrix} k_{t+1} - \overline{k} \\ n_{t+1} - \overline{n} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k_t - \overline{k} \\ n_t - \overline{n} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、$A = \begin{pmatrix} \partial k/\partial \overline{k} & \partial k/\partial \overline{n} \\ \partial n/\partial \overline{k} & \partial n/\partial \overline{n} \end{pmatrix}$ である。I を単位行列とすれば、この安定性条件は、$|A-\lambda I| = 0$ の固有値 λ_1 と λ_2 が、$|\lambda_1| \le |\lambda_2| < 1$ となることである。したがって、(A9)-(A12)より $(\partial k/\partial \overline{k})(\partial n/\partial \overline{n}) - (\partial k/\partial \overline{n})(\partial n/\partial \overline{k}) = 0$ であることに注意すると、安定性条件は、$|(\partial k/\partial \overline{k}) + (\partial n/\partial \overline{n})| < 1$ となる。

(A15) $$|\gamma_1 F_n - \gamma_2 F_k| < D$$

が得られる。$G_k = F_n + \gamma_1$、$G_n = U_{nn} + \gamma_2$ に注意して、$\tilde{D}$ を変形すると、

(A16) $$\begin{aligned}\tilde{D} &= F_k G_n - F_n G_k \\ &= F_k (U_{nn} + \gamma_2) - F_n (F_n + \gamma_1) \\ &= D - (\gamma_1 F_n - \gamma_2 F_k)\end{aligned}$$

となる。(A16) より、$\gamma_1 F_n - \gamma_2 F_k = D - \tilde{D}$ が成立するので、(A15) に代入すると、

(A17) $$|D - \tilde{D}| < D$$

を得る。よって、(A13) より、

(A18) $$0 < \tilde{D} (< 2D)$$

が成立する。

次に、$D(\theta) > 0 \ (0 \leq \theta \leq 1)$ を証明する。$D(\theta)$ は、次のように変形される。

(A19) $$D(\theta) = \tilde{D} + \theta\varphi \qquad (0 \leq \theta \leq 1)$$

ここで、$\varphi \equiv F_k \hat{G}_{n\theta} + G_n \hat{F}_{k\theta} - F_n \hat{G}_{k\theta} - G_k \hat{F}_{n\theta}$、$\hat{F}_{ij} \equiv \partial^2 \hat{F} / \partial i \partial \theta$、$\hat{G}_{ij} \equiv \partial^2 \hat{G} / \partial i \partial \theta \ (i = k, n)$ である。(A18) より、$D(0) = \tilde{D} > 0$、また、社会的最適解の問題の 2 階の条件 (22) より $D(1) > 0$ となることに注意すると、φ の符号によらず、次式が成立する。

(A20) $$D(\theta) = \tilde{D} + \theta\varphi > 0 \ (0 \leq \theta \leq 1)$$

引用文献

Barro, Robert J. "Are Government Bonds Net Wealth?" *Journal of Political Economy*, 1974, 82, pp. 1095-1117.

Becker, Gary S. and Robert J. Barro. "A Reformulation of the Economic Theory of Fertility." *Quarterly Journal of Economics*, 1988, 103(1), pp. 1-25.

Harford, Jon D. "Stock Pollution, Child-Bearing Externalities, and the Social Discount Rate." *Journal of Environmental Economics and Management*, 1997, 33, pp. 94-105.

Harford, Jon D. "The Ultimate Externality." *American Economic Review*, 1998, 88(1), pp. 260-265.

Jouvet, Pierre-Andre, Philippe Michel and Pierre Pestieau. "Altruism, Voluntary Contributions and Neutrality:

The Case of Environment Quality." *Economica*, 2000, 67, pp. 465‐475.

Jouvet, Pierre‐Andre, Philippe Michel and Jean‐Pierre Vidal. "Intergenerational Altruism and the Environment." *Scandinavian Journal of Economics*, 2000, 102(1), pp.135‐150.

Stokey, Nancy L. "Are There Limits to Growth?" *International Economic Review*, 1998, 39(1), pp. 1‐31.